EI Problema del Mes

Ingenieros Matemáticos: Jaime Hernández Bascur, Eduardo Contrera Schneider y Alejandro Omón Arancibia.

1. Saludos presentación

Como parte de la difusión y motivación de la Ingeniería Matemática, los dos Ingenieros Matemáticos mencionados le proponen a los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria un problema, cuya respuesta pueden enviar a través del link LINK, adjuntando un archivo con el desarrollo de la solución en el formato que más les acomode. Dentro de las respuestas recibidas, se eligirá la mejor bajo los siguientes parámetros/criterios: ingenio, originalidad, rigurosidad. Adicionalmente, dicha mejor respuesta será premiada con el libro El Enigma de Fermat de Simon Singh, donde se cuenta la historia de la solución de uno de los problemas más icónicos de la Matemática, la Conjetura de Fermat, por parte del Doctor Andrew Wiles, desarrollando también varias ideas matemáticas en torno a la historia de la conjetura desde que fue formulada por Pierre de Fermat (1607-1665), hasta la solución del Doctor Andrew Wiles (1953-) del año en 1993 y publicada en 1995 .

La fecha tope de recepción de soluciones es el día FECHA, y luego de dos semanas se dará a conocer una solución y la solución ganadora (eventualmente pueden coincidir). Adicionalmente, se hará entrega del premio a quién se determine como ganador.

Invitamos a todas y todos quienes cursan educación básica o media y estén fuertemenete motivados por las Ciencias Exactas a participar, es decir a leer el problema, meditarlo, resolverlo y enviar sus respuestas.

El problema

El ingeniero Omón Arancibia camina todas las mañanas de Lunes a Viernes al departamento de Ingeniería Matemática. Cuando llega a la Biblioteca Central de la Universidad de La Frontera, en vez de bordear el anillo exterior de maicillo camina en línea recta hasta el anillo interior del radier y frente a la entrada del departamento vuelve a caminar en línea recta hasta el anillo exterior. Su argumento para realizar ese recorrido es que "*dado el valor 2π que tiene la forma del perímetro, camina menos*".

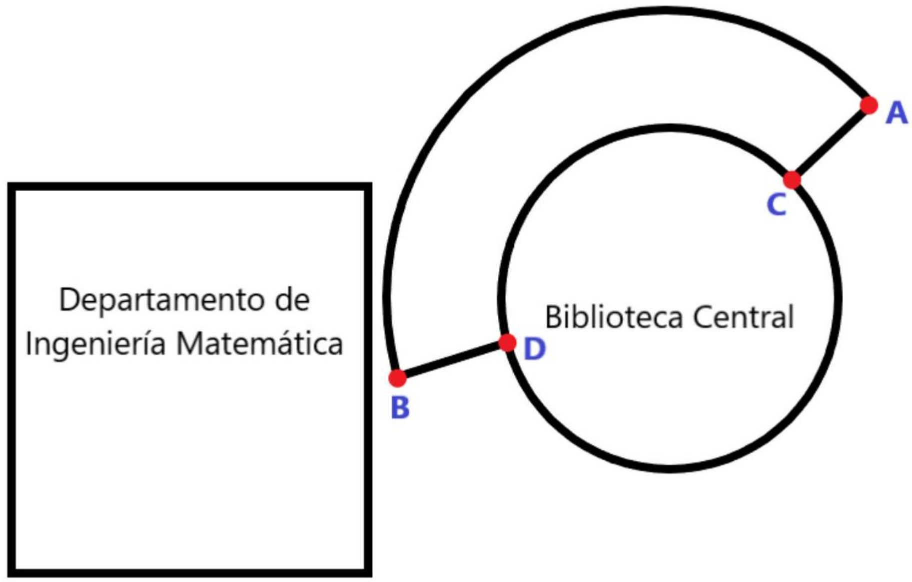

Figura 1: Esquema de trayectorias

Sin embargo, los ingenieros Hernández Bascur y Contrera Schneider no están de acuerdo con la afirmación y señalan que el camino hecho por el ingeniero Omón Arancibia no es óptimo; de hecho afirman que el camino diario es más largo que recorrer el anillo externo de maicillo.

La situación puede verse en el dibujo adjunto 1: en el punto A el ingeniero Omón Arancibia camina derecho hasta C, luego sigue el camino circular más pequeño hasta D y luego camina en línea recta hasta B. Los ingenieros Hernández Bascur y Contrera Scheneider sólo caminan por el circulo grande desde A hasta B.

Figure 1: Esquema de los dos caminos.

En función de lo presentado, decida cual de los dos caminos es más conveniente y por lo tanto cual es el que usted recorrería.

Una de las tantas soluciones

El problema es ver si el arco que recorren los ingenieros Contrera Schneider y Hernández Bascur es mayor o menor que la suma de los dos trazos rectos con el arco que recorre el ingeniero Omón Arancibia.

Para cuantificar lo anterior, primero observemos que en una circunsferencia cualquiera de radio R, el largo de un segmento de circunsferencia está dado por la fórmula

$$\textbf{Arco} = \textbf{Radio multiplicado por ángulo,}$$

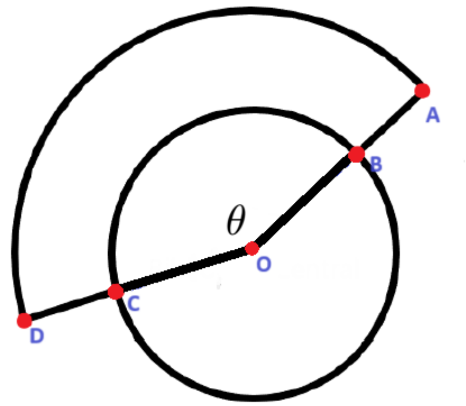

Figura 2: Círculos concéntricos en la biblioteca

es decir

$$\text{Longitud de arco } = R \cdot \measuredangle, \tag{1}$$

donde el ángulo está medido en radianes, lo que será explicado más adelante.

A partir de (1), para poder determinar cuál de los dos caminos es mejor en términos de largo, se necesita tener radios y un ángulo; llamemos θ el ángulo entre los puntos A y B, R_1 el radio desde el centro O de la planta de la biblioteca hasta el camino de los ingenieros Contrera Schneider y Hernández Bascur, y R_2 el radio desde el centro de la planta de la biblioteca al camino que recorre el ingeniero Omón Arancibia, tal y como muestra la figura 2. De la misma figura se puede ver que $R_1 = \overline{OA} = \overline{OD}$, $R_2 = \overline{OB} = \overline{OC}$ y $R_1 > R_2$.

Con lo anterior, podemos afirmar a partir de la fórmula (1) que el camino que recorren los ingenieros Contrera Schneider y Hernández Bascur corresponde a $R_1\theta$, y que el camino que recorre el ingeniero Omón Arancibia es $2\,(R_1 - R_2)$, correspondiente a los trazos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de la figura, más $R_2\theta$ que es lo caminado a través del radier, es decir $2\,(R_1 - R_2) + R_2\theta$.

Los dos caminos recorridos tienen igual largo cuando

$$R_1\theta = 2\,(R_1 - R_2) + R_2\theta \tag{2}$$

de donde se tiene que

$$(R_1 - R_2)\,\theta = 2\,(R_1 - R_2) \tag{3}$$

y como $R_1 - R_2 > 0$, se concluye que $\theta = 2$.

La interpretación de esta última igualdad es muy importante porque, en primer lugar, cuál camino es mejor no depende de los radios y por otra parte, el ángulo se debe interpretar en términos de radianes. Si $\theta > 2$ el camino de los ingenieros Contrera Schneider y Hernández Bascur es más largo, mientras que si $\theta < 2$, el camino del ingeniero Omón Arancibia es más largo. Esto lo podemos ver planteando la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{Camino Contrera-Hernández} &> \text{Camino Omón Arancibia} \\ R_1\theta &> 2\left(R_1 - R_2\right) + R_2\theta \end{aligned}$$

lo que permite concluir lo mencionado previamente.

Para tener una idea cuantitativa del valor del ángulo crítico 2, el ángulo recto en radianes vale $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ y en adición se sabe que $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$, por lo tanto se cumple la desigualdad $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi$ en radianes. En otras palabras, el ángulo crítico está entre $90°$ y $120°$.

En función de lo expuesto, el camino óptimo en términos de longitud queda determinado por la medición del ángulo entre las dos rectas que unen las dos circunsferencias.